EPFL

Physique Générale : Mécanique

Exercices résolus en classe

Sections SC, GC & SIE , BA1

Dr. J.-P. Hogge

Swiss Plasma Center

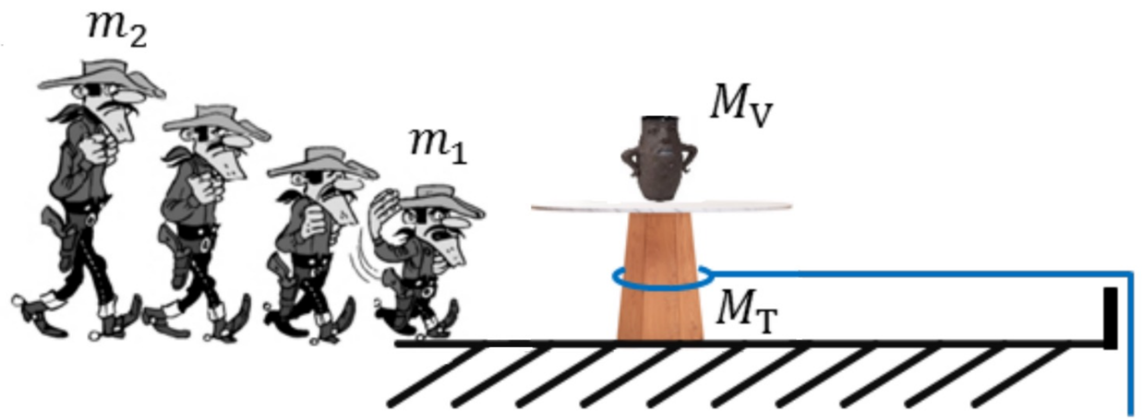
École polytechnique fédérale de Lausanne

Faculté des sciences de base

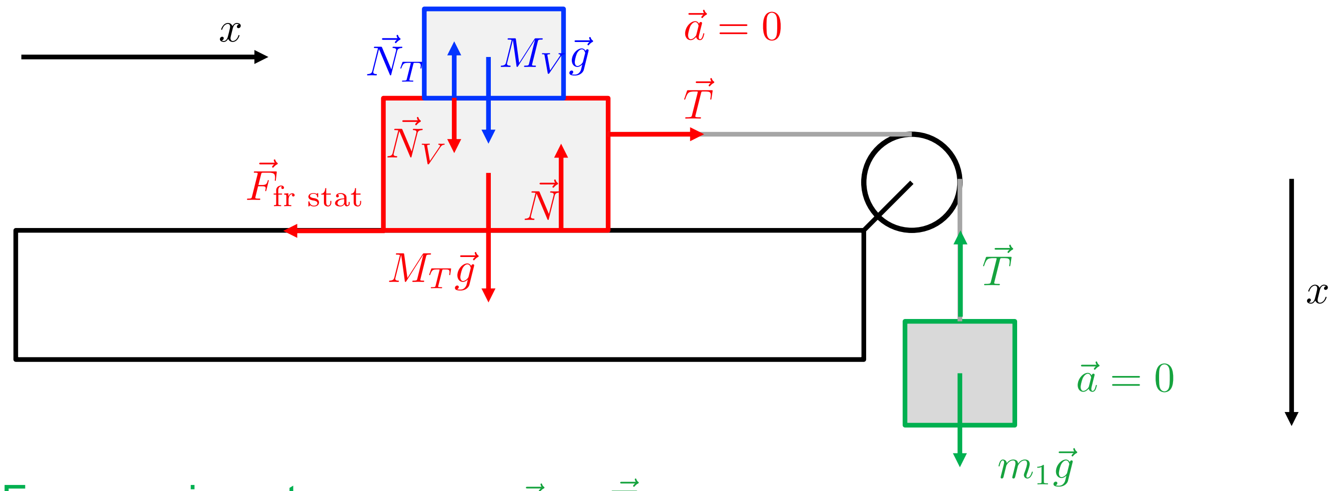
Swiss Plasma Center

Evasion des Dalton

Les frères Dalton désirent s'évader de prison. Pour ce faire, ils ont confectionné une corde avec leurs draps, qu'ils ont attachée à une table de masse M_V avant de lancer l'autre extrémité par la fenêtre. On note les coefficients de frottements secs statique et dynamique de la table sur le sol α_s et α_d, respectivement. On néglige les frottements entre la corde et la fenêtre. Enfin, on suppose la corde parfaitement verticale après la fenêtre.



(a) Joe (masse m_1) veut s'enfuir en premier. Cependant, la masse de la table n'est pas suffisante pour que les frottements empêchent cette dernière de glisser lorsque Joe sera suspendu à la corde. Il pose donc un grand vase sur la table. Quelle doit être la masse minimale du vase, M_V, pour que la table reste immobile lorsque Joe est suspendu à la corde ?



Forces agissant sur m_1: $m_1\vec{g}$, $\vec{T}$

Forces agissant sur M_T: $M_T\vec{g}$, $\vec{T}$, $\vec{N}_V$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{fr stat}}$

Forces agissant sur M_V: $M_V\vec{g}$, $\vec{N}_T$

- Y a-t-il lieu de considérer une force de frottement entre M_T et M_V ?

  Non, car l'accélération du vase est nulle, et donc la force qui pourrait être exercée sur celui-ci par frottement avec la table (ce serait la seule force horizontale) l'est aussi.

- Système: Joe (m_1)

Newton: $m_1\,\vec{a}_1 = m_1\,\vec{g} + \vec{T}$

Selon x: $0 = m_1\,g - T \quad \Longrightarrow \quad T = m_1\,g$ ①

- **Système: Table + Vase (M_T+M_V)** (pourquoi ?): La table et le vase ont une accélération nulle. On va donc pouvoir determiner la force de frottement exercéepar le sol sur la table, qui compense la traction exercée par la corde.

Forces externes au système (M_T+M_V): $M_T\,\vec{g}\,,\ M_V\,\vec{g}\,,\ \vec{F}_{\text{fr stat}}\,,\ \vec{T}\,,\ \vec{N}$

Newton sur le système (M_T+M_V): $(M_T+M_V)\vec{a}=(M_T+M_V)\vec{g}+\vec{F}_{\text{fr stat}}+\vec{T}+\vec{N}$

Selon y: $N-(M_T+M_V)g=0 \;\Rightarrow\; N=(M_T+M_V)g$ ②

Selon x: $T-F_{\text{fr}}=0 \;\Rightarrow\; T=F_{\text{fr}}$ ③ valable si

Modèle pour la force de frottement: $F_{\text{fr}}=T \quad \text{si} \quad T\leq\alpha_s N$

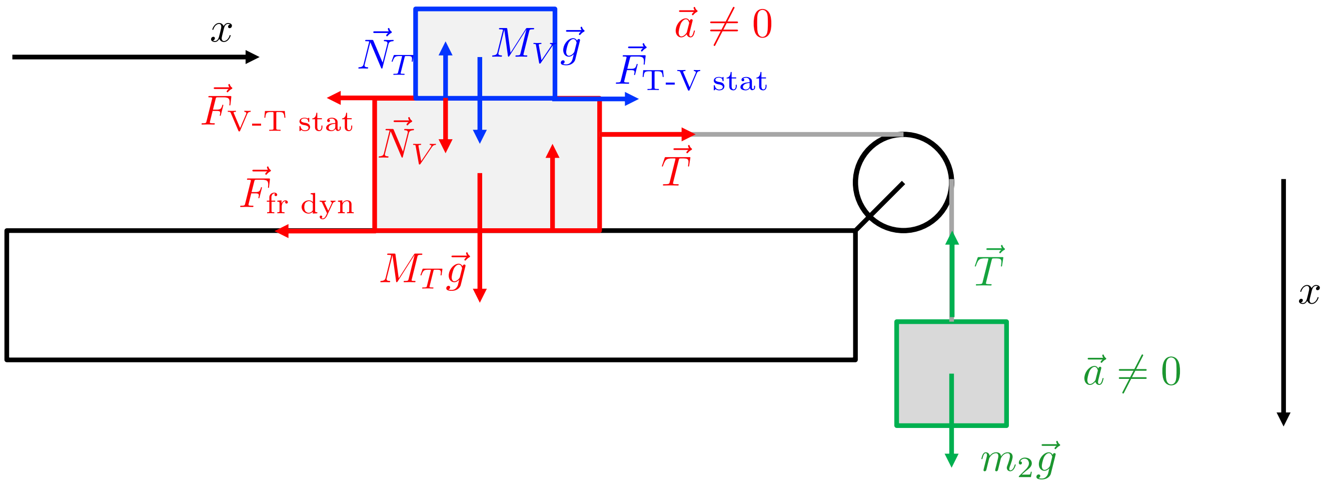
$\Rightarrow$ ③ valable si $T\leq\alpha_s(M_T+M_V)g$ ②

On remplace T par son expression tirée de ① :

$$m_1 g\ \leq\ \alpha_s(M_T+M_V)g \;\Rightarrow\; \boxed{M_V\ \geq\ \frac{m_1}{\alpha_s}-M_T}$$

(b) Averell (masse $m_2 > m_1$) s'enfuit ensuite. La masse du vase n'est plus suffisante pour maintenir la table immobile. La table va donc subir une accélération lorsqu'Averell est suspendu à la corde.

Quelle est la valeur maximale de m_2 pour que le vase posé sur la table ne glisse pas ? On notera β_S le coefficient de frottement statique du vase sur la table.



- Comme l'accélération du vase est différente de zéro, il faut tenir compte de la force de frottement exercée par la table, qui est responsable de son mouvement.

- **Système: Averell (m_2)**

Forces externes: $m_2\,\vec{g}\quad,\quad\vec{T}$

Newton sur Averell: $m_2\,\vec{a} = m_2\,\vec{g} + \vec{T}$

Selon x: $m_2\,a = m_2\,g - T$ ①

- **Système: Table + Vase (M_T+M_V).**

Forces externes: $M_T\,\vec{g}\,,\ M_V\,\vec{g}\,,\ \vec{F}_{\text{fr-dyn}}\,,\ \vec{T}\,,\ \vec{N}$

Forces internes: $\vec{N}_T\,,\ \vec{N}_V\,,\ \vec{F}_{V-T}\,,\ \vec{F}_{T-V}$

Newton sur le système (M_T+M_V): $(M_T + M_V)\,\vec{a} = (M_T + M_V)\,\vec{g} + \vec{F}_{\text{fr-dyn}} + \vec{T} + \vec{N}$

Selon y: $0 = -(M_T + M_V)\,g + N$ ②

Selon x: $(M_T + M_V)\,a = -F_{\text{fr-dyn}} + T$

Modèle de force de frottement: $F_{\text{fr-dyn}} = \alpha_d\,N = \alpha_d\,g\,(M_T + M_V)$

$F_{\text{fr-dyn}}$ -> ② $\qquad (M_T + M_V)\,a = T - \alpha_d\,g\,(M_T + M_V)$ ③

- On determine l'accélération du système ($M_T + M_V$) en résolvant le système formé par ① et ③

$$\begin{cases} m_2\, a = m_2\, g - T \\ (M_T + M_V)\, a = T - \alpha_d\, g\, (M_T + M_V) \end{cases}$$

$$a = g\, \frac{m_2 - \alpha_d (M_T + M_V)}{m_2 + M_T + M_V} \qquad ④$$

- Faculté des sciences de base
- Swiss Plasma Center

- Comme on cherche une condition sur le coefficient de frottement statique entre la table et le vase, il faut considerer un système pour lequel $\vec{F}_{T-V}$ ou $\vec{F}_{V-T}$ est externe. On choisit p.ex. le vase.

- **Système: Vase (M_V)**

Forces externes: $M_V\,\vec{g}\,,\ \vec{N}_T\,,\ \vec{F}_{T-V}$

Newton sur le système M_V: $M_V\,\vec{a} = M_V\,\vec{g} + \vec{N}_T + \vec{F}_{T-V}$

Selon y: $0 = -M_V\,g + N_T \quad \Longrightarrow \quad N_T = M_V\,g$ ⑤

Selon x: $M_V\,a = F_{T-V}$ ⑥

Non-glissement: $F_{T-V} \leq \beta_s\,N_T = \beta_s\,M_V\,g$ ⑦

⑥
⑦

On réécrit la condition de non-glissement en utilisant ⑥, puis on remplace a par son expression tirée de ④

$$M_V\,a \leq \beta_s\,M_V\,g \qquad\qquad a \leq \beta_s\,g$$

valable si

$$g\,\frac{m_2 - \alpha_d(M_T + M_V)}{m_2 + M_T + M_V} \leq \beta_s\,g$$

④

■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

On en tire une expression pour la valeur maximale de m_2 (la masse d'Averell) telle qu'il n'y a pas de glissement:

$$g\,\frac{m_2 - \alpha_d(M_T + M_V)}{m_2 + M_T + M_V} \leq \beta_s\, g$$

$$m_2 - \alpha_d(M_T + M_V) \leq \beta_s m_2 + \beta_s(M_T + M_V)$$

$$m_2(1 - \beta_s) \leq (\beta_s + \alpha_d)(M_T + M_V)$$

$$\boxed{m_2 \leq \frac{(\beta_s + \alpha_d)(M_T + M_V)}{(1 - \beta_s)}}$$